

В МИРЕ НАУКИ

Scientific American · Издание на русском языке
№ 8 · АВГУСТ 1989 · С. 48–56

Преобразование Фурье



Двойную спираль ДНК, циклы солнечной активности и сложные электронные сигналы математически можно представить в виде ряда волнообразных кривых. Эта идея лежит в основе мощного аналитического инструмента, название которого вынесено в заголовок статьи

РОНАЛЬД Н. БРЕЙСУЭЛЛ

Преобразование Фурье вычисляется всякий раз, когда мы слышим звук. Ухо автоматически выполняет вычисление, проделать которое наш сознательный ум способен лишь после нескольких лет обучения математике. Наш орган слуха строит преобразование, представляя звук — колебательное движение частиц упругой среды, распространяющееся в виде волн в газообразной, жидкой или твёрдых средах — в виде спектра последовательных значений громкости для тонов различной высоты. Мозг превращает эту информацию в воспринимаемый звук.

Аналогичные операции можно производить с помощью математических методов над звуковыми волнами или практически над любыми другими колебательными процессами — от световых волн и океанских приливов до циклов солнечной активности. Пользуясь этими математическими приёмами, можно раскладывать функции, представляя колебательные процессы в виде набора синусоидальных составляющих — волнообразных кривых, переходящих от максимума к минимуму, затем опять к максимуму, подобно океанской волне. Преобразование Фурье — это функция, описывающая амплитуду и фазу каждой синусоиды, соответствующей определённой частоте. (Амплитуда представляет высоту кривой, а фаза — начальную точку синусоиды.)

Преобразование Фурье стало мощным инструментом, применяемым в различных научных областях. В некоторых случаях его можно использовать как средство решения сложных уравнений, описывающих динамические процессы, которые возникают под воздействием электрической, тепловой или световой энергии. В других случаях оно позволяет выделять регулярные составляющие в сложном колебательном сигнале, благодаря чему можно правильно интерпретировать экспериментальные наблюдения в астрономии, медицине и химии.

Первым человеком, поведавшим миру об этом методе, был французский математик Жан Батист Жозеф Фурье, именем которого и было названо преобразование. Сказать, что Фурье интересовался теплотой, слишком мало, — он был просто помешан на тепле. Люди, посещавшие его дом в Гренобле, часто жаловались на царившую там невыносимую жару.

Одевался он также всегда очень тепло. Возможно, именно жаркий климат привлёк Фурье, когда в 1798 году он присоединился к свите Наполеона, состоявшей из 165 учёных, которая сопровождала его в египетском военном походе.

Пока Наполеон сражался с сирийцами в Палестине, изгонял турок из Египта и преследовал предводителя мамлюков Мурад-бея, французские учёные занимались крупными научными исследованиями в географии, археологии, медицине, земледелии и истории. Фурье был назначен секретарём научной организации, известной под названием Египетского института. Он весьма успешно справлялся со своими административными обязанностями, поэтому ему часто стали поручать и задания дипломатического характера. Несмотря на свою занятость, он всё же успевал интенсивно заниматься изучением египетских древностей и размышлять о математической теории нахождения корней алгебраических уравнений.

Незадолго до того, как в 1801 году французы были изгнаны из Египта, Фурье и его коллеги отплыли во Францию. Командующий британским военным флотом адмирал Сидней Смит захватил их корабль вместе с грузом — древними египетскими рукописями и другими находками. Следуя благородному духу той эпохи, Смит высадил учёных целыми и невредимыми в Александрии. Впоследствии представитель британского командования был направлен в Париж, чтобы вернуть конфискованные материалы, за исключением Розеттского камня (являющегося ключом к расшифровке египетских иероглифов), который и по сей день стоит в Британском музее как памятник военного поражения Наполеона и напоминание о том вкладе, который он внёс в египтологию.

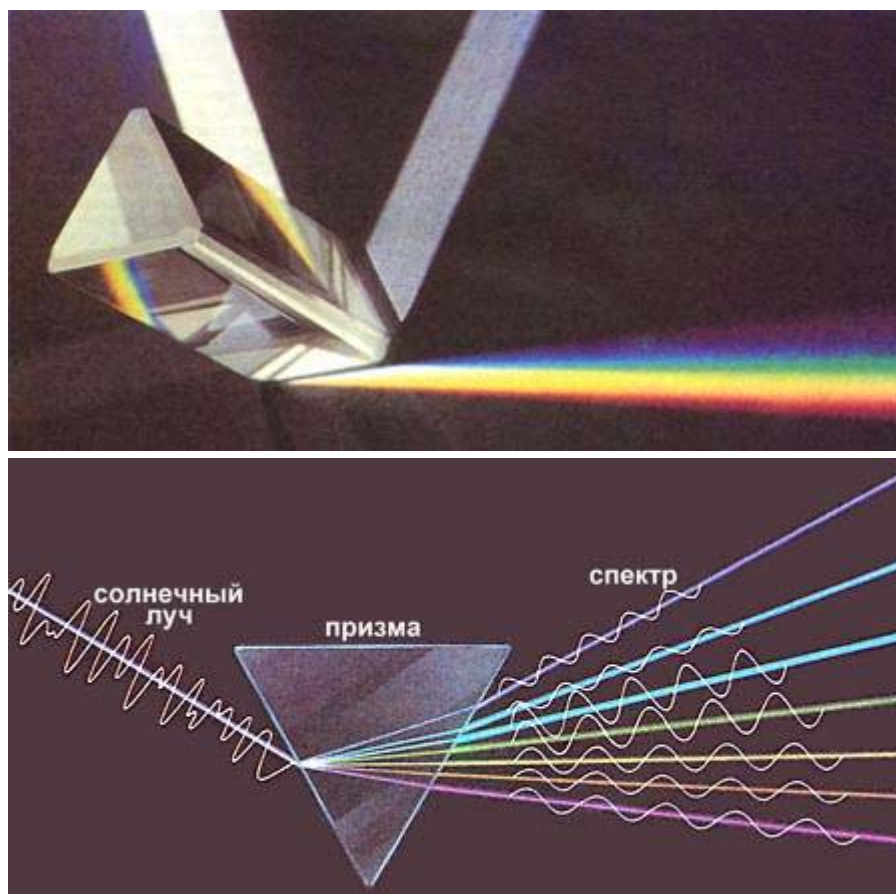
Вернувшись во Францию, Фурье сосредоточился на математических исследованиях, став профессором анализа в Политехнической школе, но в 1802 году вернулся на службу к Наполеону. Фурье был назначен префектом департамента Изер. Пытаясь устранить руины, оставшиеся после революционных событий 1789 года, он возглавил строительство французского участка дороги на Турин и осушил 80 000 км² малярийных болот. В этот же период он вывел уравнение, описывающее распространение тепла в твёрдом теле. К 1807 году Фурье изобрёл и метод решения этого уравнения: преобразование Фурье.

Фурье применил свой математический метод для объяснения механизма теплопроводности. Удобным примером, в котором не возникает вычислительных трудностей, является распространение тепла по якорному кольцу (железному кольцу, к которому крепится якорь), погружаемому на некоторое время наполовину в огонь. Когда погружённая в огонь часть кольца раскаляется докрасна, его вынимают из огня. Чтобы тепло не успело уйти в воздух, кольцо сразу закапывают в мелкий песок, а затем измеряют температуру на той его части, которая непосредственно огнём не нагрелась.

Вначале распределение температуры нерегулярно: часть кольца равномерно холодная, другая часть равномерно горячая, а между этими зонами наблюдается резкий градиент температуры. Однако, по мере того как тепло распространяется от горячей зоны к холодной, распределение температуры становится всё более равномерным. Вскоре распределение приобретает форму синусоиды: график изменения температуры плавно нарастает и убывает в виде буквы S, точно по такому же закону, по которому изменяется функция синуса или косинуса. Синусоида постепенно выравнивается и в конце концов температура по всему кольцу становится одинаковой.

Фурье предположил, что первоначальное нерегулярное распределение можно разложить на множество простых синусоид, каждая из которых имеет свой максимум

температуры и свою фазу, т.е. начальное положение на кольце. При этом каждая синусоидальная компонента должна изменяться от максимума к минимуму и обратно целое число раз на одном полном обороте по кольцу. Составляющая, которая имеет ровно один период на кольце, была названа главной гармоникой, а составляющие с двумя, тремя и более периодами — соответственно второй, третьей и т.д. гармоникой. Математическая функция, описывающая максимум температуры и позицию, или фазу, каждой из гармоник, называется преобразованием Фурье от функции распределения температуры. Фурье свёл единую функцию распределения, трудно поддающуюся математическому описанию, к более удобному в обращении ряду периодических функций синуса и косинуса, которые в сумме дают исходное распределение.

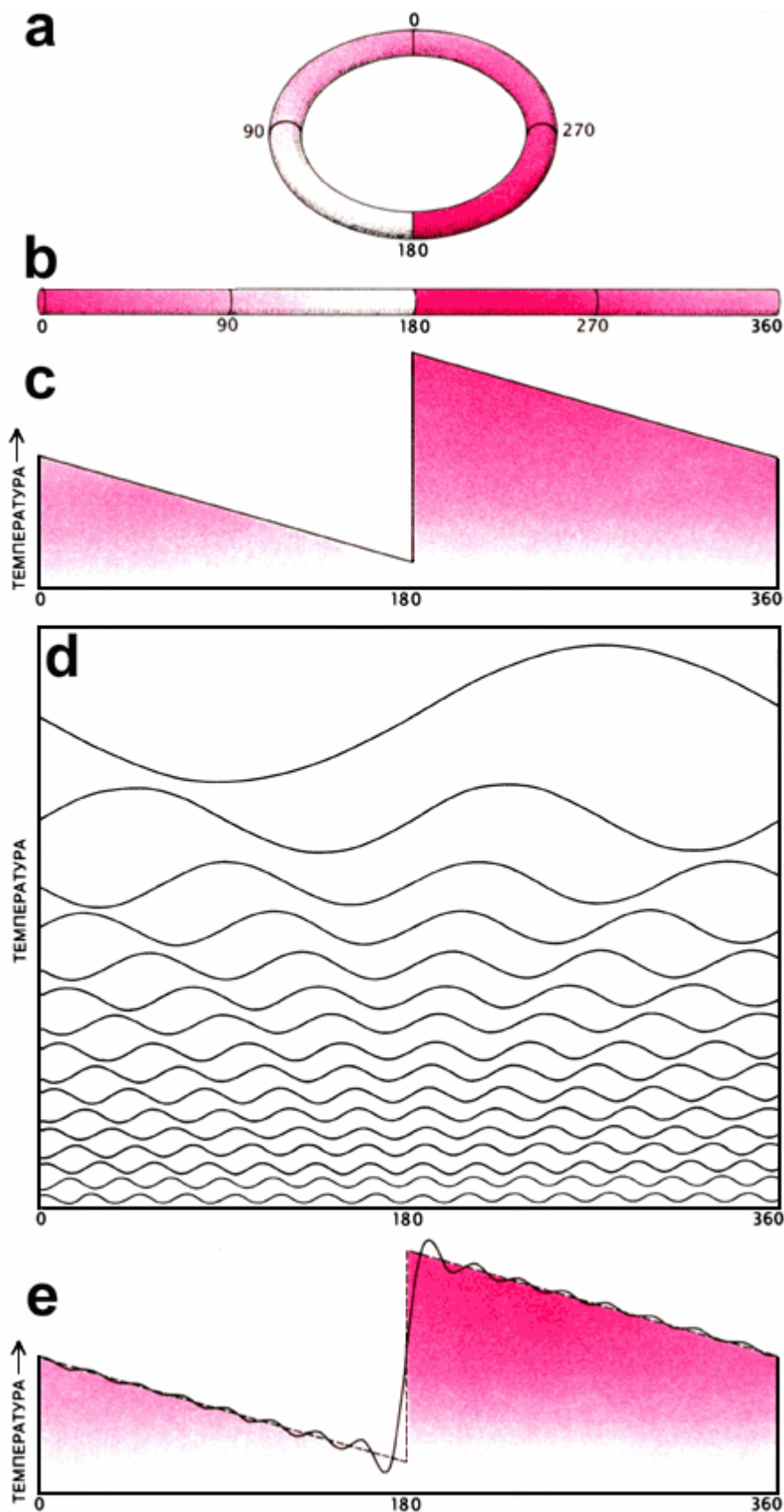


Солнечный луч, разложенный на спектр, является физическим аналогом математических преобразований (*вверху*). Интенсивность солнечного луча, входящего в призму, постоянно меняется во времени (*внизу*). Свет, выходящий из призмы, разделён в пространстве на отдельные «чистые» цвета, или частоты. В этом спектре имеется средняя амплитуда на каждой частоте. Таким образом, функция интенсивности от времени трансформировалась в функцию амплитуды в зависимости от частоты. Преобразование Фурье может представить сигнал, изменяющийся во времени, в виде зависимости частоты и амплитуды, но оно даёт также информацию о фазе.

Применяя этот анализ к процессу распространения тепла по кольцу, Фурье рассудил, что чем больше число периодов у синусоидальной компоненты, тем быстрее она должна затухать. Эту мысль можно проиллюстрировать, проследив за отношениями, наблюдающимися между главной и второй гармониками температурного распределения. Во второй гармонике температура дважды меняется от максимума к минимуму на одном проходе вдоль кольца, в то время как в главной гармонике это изменение наблюдается лишь один раз. Следовательно, расстояние, которое нужно преодолеть теплу от максимума температуры к минимуму, во второй гармонике вдвое меньше, чем в первой, главной. Более того, температурный градиент во второй гармонике также вдвое круче, чем в первой. Таким образом, поскольку вдвое более интенсивный поток тепла проходит

вдвое меньшее расстояние, вторая гармоника должна затухать вчетверо быстрее, по сравнению с первой, как функция времени.

Гармоники более высокого порядка будут затухать ещё быстрее. Поэтому лишь одно синусоидальное распределение, соответствующее главной составляющей, останется при приближении температуры кольца к равновесию. Фурье считал, что с помощью этого метода можно рассчитать, как любое начальное распределение температуры изменяется во времени.

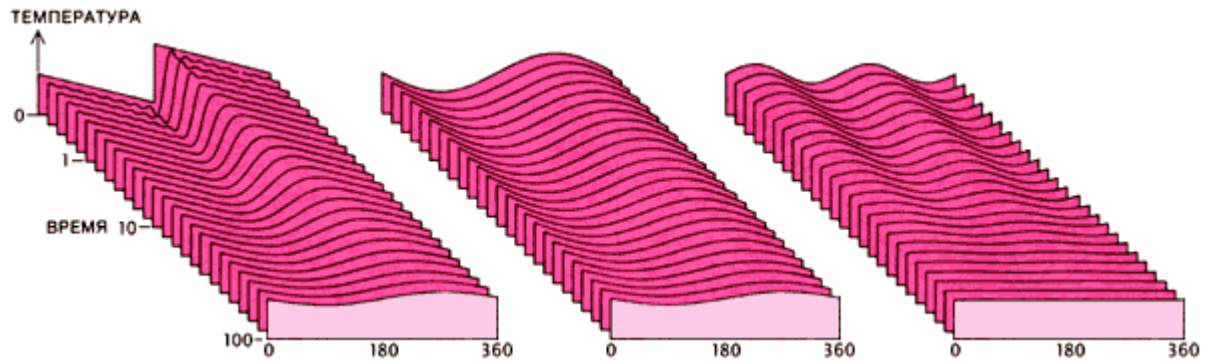


Распределение температуры в железном кольце было одним из первых физических явлений, анализировавшихся методом Фурье. Вверху (a) показано распределение температуры в различных точках кольца: более горячие области окрашены ярче. Чтобы провести анализ, кольцо «разгибают» и измеряют температуру в каждой точке (b), на основании полученных данных строят график распределения температуры вдоль окружности (c). Затем эту графическую функцию раскладывают на множество синусоидальных кривых различной частоты и амплитуды (d). При простом суммировании 16 кривых (сплошная линия, e) получается хорошая аппроксимация исходного распределения температуры

(пунктирная

линия,

e).



Теплопроводность железного кольца определяет изменение температурного распределения во времени (слева). Так же, как температурное распределение можно описать в любой момент времени рядом синусоидальных кривых, изменение распределения во времени может быть описано через изменения характера самих синусоид. Здесь показаны распределения с одним периодом, или первая гармоника (в центре), и распределение с двумя периодами, или вторая гармоника (справа). Фурье установил, что вторая гармоника затухает в 4 раза быстрее, чем первая, а гармоники более высоких порядков затухают с ещё большей скоростью. Поскольку первая гармоника изменяется медленнее других, общее температурное распределение стремится к синусоидальной форме первой гармоники.

Анализ Фурье был вызовом математическим теориям, которых твёрдо придерживались его современники. В начале XIX века многие выдающиеся парижские математики, в том числе такие как Лагранж, Лаплас, Лежандр, Био и Пуассон, не могли принять утверждение Фурье о том, что любое исходное распределение температуры можно разложить на составляющие в виде главной гармоники и гармоник более высоких частот. Леонард Эйлер также считал идеи Фурье ошибочными, хотя к тому времени сам пришёл к выводу, что некоторые функции можно представить суммой синусоид. И когда Фурье огласил своё утверждение на одном из заседаний Французской академии наук, Лагранж заявил, что это невозможно.

Тем не менее академия не могла игнорировать значение результатов, полученных Фурье, и удостоила его премии за математическую теорию законов теплопроводности и сравнение результатов его теории с точными физическими экспериментами. Однако награда была присуждена со следующей оговоркой: «Исходя из новизны предмета исследований и его важности, мы решили присудить премию, отмечая в то же время, что путь, которым автор приходит к своим уравнениям, не свободен от затруднений, и что анализ, проведённый им при их интегрировании, оставляет желать несколько большей общности, равно как и строгости».

Сомнения, с которыми коллеги Фурье встретили его работу, явились причиной того, что её публикация была отложена до 1815 года. На самом деле она так и не была полностью напечатана вплоть до 1822 года, когда вышла его книга «Аналитическая теория тепла».

В подходе Фурье основное возражение вызывало утверждение о том, что по существу разрывная функция может быть представлена суммой синусоидальных функций, являющихся непрерывными. Разрывные функции описывают разрывающиеся кривые или прямые линии. В качестве примера можно привести функцию, называемую ступенькой Хевисайда, значение которой равно 0 слева от разрыва и 1 справа. (Такая функция описывает, например, зависимость электрического тока от времени при замыкании цепи.) Современники Фурье никогда не сталкивались с такой ситуацией, когда разрывная

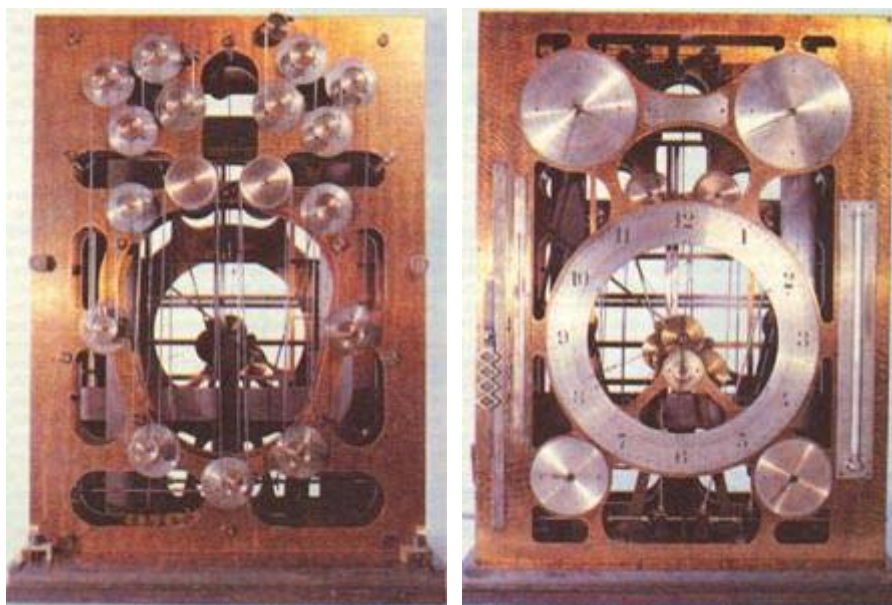
функция описывалась бы комбинацией обычных, непрерывных функций, таких как линейная, квадратичная, экспонента или синусоида. Однако если Фурье был прав в своих предположениях, то сумма бесконечного ряда тригонометрических функций должна сходиться к точному представлению ступенчатой функции, даже тогда, когда у функции много таких ступенек. В то время это утверждение казалось совершенно абсурдным.

Тем не менее, несмотря на все эти сомнения, многие исследователи, в том числе математик Софи Жермен и инженер Клод Навье, начали расширять сферу исследований Фурье, выведя их за пределы анализа теплопроводности. А математиков тем временем продолжал мучить вопрос о том, может ли сумма синусоидальных функций сходиться к точному представлению разрывной функции.

Вопрос о сходимости возникает всякий раз при суммировании бесконечного ряда чисел. Рассмотрим классический пример: достигнете ли вы когда-нибудь стены, если с каждым шагом будете проходить половину оставшегося расстояния? Первый же шаг приведёт вас к отметке на половине пути, второй — к отметке на трёх его четвертях, а после пятого шага вы преодолеете уже почти 97% пути. Вы почти дошли до цели, однако сколько бы ещё шагов ни сделали, вы никогда не достигнете её в строгом математическом смысле. Можно лишь доказать математически, что в конце концов вы сможете приблизиться на любое заданное, сколько угодно малое расстояние. (Доказательство будет эквивалентно демонстрации того, что сумма одной второй, одной четвертой, одной восьмой, одной шестнадцатой и т.д. стремится к единице.)

Вопрос о сходимости рядов Фурье снова возник в конце XIX века в связи с попытками предсказания интенсивности приливов и отливов. Лорд Кельвин изобрёл аналоговое вычислительное устройство, позволяющее морякам торгового и военного флота узнавать о приливах и отливах. Аналоговый вычислитель механически определял наборы амплитуд и фаз по таблице приливных высот и соответствующих моментов времени, тщательно замеренных на протяжении года в данной гавани.

Каждая амплитуда и фаза представляли синусоидальную компоненту функции высоты прилива и были одной из периодических составляющих. Результаты вводились в вычислительное устройство лорда Кельвина, которое синтезировало кривую, предсказывающую высоту прилива как функцию времени на следующий год. Вскоре подобные кривые приливов были составлены для всех портов мира.



Предсказатель приливов Феррела, аналоговое вычислительное устройство, построенное в конце XIX века, производил анализ Фурье для прогнозирования высоты приливов. По данным о высоте приливов, собранным в данной гавани, другая машина вычисляла так называемые коэффициенты Фурье, каждый из которых отражал влияние на периодичность высоты прилива отдельных факторов, таких как гравитационное притяжение Луны. Таблицы коэффициентов Фурье публиковались для всех портов мира. Коэффициенты для данного порта вводились в специальные машины, такие как предсказатель приливов Феррела, путём соответствующих поворотов ручек на задней панели машины (*слева*). Установив затем интересующее время на передней панели (*справа*), на циферблате автоматически выставлялась предсказываемая высота.

Представлялось очевидным, что предсказывающая приливы машина с большим количеством механических элементов счёта сможет вычислить большее число амплитуд и фаз и, таким образом, обеспечит более точные предсказания. Однако оказалось, что эта закономерность не соблюдалась в случае, когда приливная функция, которую нужно было синтезировать, содержала резкий скачок, или, другими словами, по существу являлась разрывной функцией.

Предположим, мы ввели числа из таблицы моментов времени и высоты приливов в предсказывающую машину, которая затем вычисляет несколько коэффициентов Фурье. Исходную функцию можно затем восстановить по синусоидальным компонентам, соответствующим вычисленным коэффициентам, и расхождение между исходной и восстановленной функциями можно измерить в каждой точке. Процедуру, определяющую эти расхождения, можно повторять, каждый раз подсчитывая новые коэффициенты и подставляя их в восстановленную функцию. Мы увидим, что при каждом повторении значение максимальной ошибки не уменьшается. В то же время расхождения локализуются в той области кривой, которая прилегает к точке разрыва, и в конечном итоге в любой заданной точке величина расхождения приближается к нулю. Джошуа Уиллард Гиббс из Йельского университета теоретически подтвердил этот результат в 1899 году.

Анализ Фурье остаётся неприменимым к необычным функциям, в частности таким, которые содержат бесконечное количество конечных скачков на конечном интервале. Однако в общем и целом ряд Фурье всегда сходится, если исходная функция представляет собой результат реального физического измерения.

Вопрос о сходимости рядов Фурье для тех или иных классов функций привёл к появлению новых областей в математике. Одним из примеров в этом смысле является теория обобщённых функций, связанная с такими именами, как Дж. Темпл, Дж. Микусинский и Л. Шварц. В рамках этой теории была подведена чёткая теоретическая основа под такие функции, как ступенька Хевисайда и дельта-функция Дирака (последняя описывает область единичной площади, сконцентрированную в бесконечно малой окрестности точки). Благодаря этой теории преобразование Фурье стало применимым для решения уравнений, в которых фигурируют такие интуитивные понятия, как точечная масса, точечный заряд, магнитные диполи и сосредоточенная нагрузка на балке.

Развивавшаяся на протяжении почти двух столетий теория, связанная с преобразованием Фурье, теперь уже окончательно сформировалась. При помощи анализа Фурье пространственная или временная функция разбивается на синусоидальные составляющие, каждая из которых имеет свою частоту, амплитуду и фазу. Преобразование Фурье — это функция, представляющая амплитуду и фазу, соответствующие каждой частоте. Преобразование можно получить двумя различными математическими методами, один из которых применяется, когда исходная функция непрерывна, а другой — когда она состоит из множества отдельных дискретных измерений.

Если эта функция получена из значений с определёнными дискретными интервалами, её можно разбить на ряд синусоидальных функций с дискретными частотами — от самой низкой, главной частоты и далее с частотами, вдвое, втрое и т.д. выше главной. Такая сумма синусоид называется рядом Фурье.

Если же исходная функция задаёт значение для каждого действительного числа, её можно разложить на синусоидальные функции всех возможных частот; эти функции объединяются посредством операции, называемой интегралом Фурье. Преобразование Фурье не является ни рядом, ни интегралом Фурье. В случае дискретной функции — это зависящий от частоты список амплитуд и фаз, соответствующих компонентам ряда Фурье. В случае же непрерывной функции — это функция частоты, получающаяся при вычислении интеграла Фурье.

Независимо от способа, которым получается преобразование, для каждой частоты необходимо указать два числа. Это могут быть амплитуда и частота, однако ту же информацию могут кодировать и другие пары чисел. Эти значения можно выразить в виде одного комплексного числа. (Комплексное число представляет собой сумму одного действительного числа с другим действительным числом, умноженным на квадратный корень из минус единицы.) Таким представлением пользуются очень широко, так как оно позволяет привлечь математический аппарат алгебры комплексных чисел. Теория функций комплексных переменных и преобразование Фурье стали необходимыми в численных вычислениях, проводимых при конструировании электрических цепей, анализе механических колебаний и изучении механизма распространения волн.

Представление исходной функции комплексным преобразованием Фурье даёт ряд преимуществ при вычислениях. Типичная задача заключается, например, в том, чтобы рассчитать ток в заданной цепи при известном приложенном к ней напряжении. Если решать эту задачу прямым методом, то приходится иметь дело со сложным дифференциальным уравнением, связывающим функции напряжения и тока. В то же время преобразования Фурье от функций напряжения и тока можно связать уравнением, которое решается тривиально.

В наше время изучение преобразования Фурье главным образом сводится к поиску эффективных способов перехода от функций к их преобразованному виду и обратно. Чтобы вычислить интеграл Фурье и произвести преобразование, можно воспользоваться аналитическими методами. И хотя при попытке применения этих методов в повседневной практике могут возникнуть определённые трудности, многие интегралы Фурье уже найдены и сведены в математические справочники. Кроме того, эти методы можно дополнить, ознакомившись с несколькими полезными теоремами, относящимися к преобразованиям Фурье. С помощью этих теорем можно справиться с более или менее сложными волновыми функциями путём сведения их к ряду более простых составляющих.

К счастью, существуют ещё и численные методы, позволяющие рассчитывать преобразования Фурье для функций, форма которых основана на экспериментальных данных, или функций, интегралы Фурье от которых аналитически взять трудно и в таблицах они отсутствуют. До появления компьютеров численные расчёты преобразований были довольно утомительными, так как приходилось выполнять большое количество арифметических операций вручную. Время, требующееся для расчётов, можно было немного сократить за счёт использования специальных бланков и унификации процедур, однако трудоёмкость этих расчётов оставалась всё же огромной.

Количество необходимых арифметических операций зависело от числа точек, требовавшегося для описания волновой функции. Количество сложений было примерно таким же, что и число точек, а количество умножений было равно квадрату числа точек. Например, для анализа волновой функции, заданной 1000 точек, равномерно распределённых на интервале, необходимо было выполнить примерно 1000 сложений и ровно один миллион умножений.

Расчёты подобного рода стали более доступными с появлением компьютеров и специальных программ, реализующих новые методы анализа Фурье. Один такой метод был разработан в 1965 году Джеймсом У. Кули из Исследовательского центра им. Томаса Уотсона корпорации IBM и Джоном У. Тьюки из Bell Telephone Laboratories в Муррей-Хилле (шт. Нью-Йорк). Их работа привела к созданию программы, получившей известность как быстрое преобразование Фурье.

В быстром преобразовании Фурье время вычислений экономится за счёт уменьшения количества умножений, необходимых для анализа кривой. В то время количество умножений имело такое важное значение просто потому, что операция умножения выполнялась значительно медленнее других машинных операций, таких как сложение, считывание из памяти или записать данных в память.

В методе быстрого преобразования Фурье кривая делится на большое число равномерно распределённых выборочных значений. Количество умножений, необходимое для анализа кривой, уменьшается наполовину при таком же уменьшении количества точек. Например, кривая с 16 выборочными значениями обычно требует 16 в квадрате, или 256 умножений. Но предположим, что кривая была поделена на два интервала, по 8 точек в каждом. В этом случае количество умножений, требующихся для анализа каждого интервала, равно 8^2 , или 64. В сумме для обоих интервалов получаем 128, или половину от исходного количества.

Но если при делении последовательности точек пополам мы получаем двукратную выгоду, то почему бы не продолжить эту стратегию дальше? Продолжив процесс разбиения, мы придём к восьми неделимым сегментам, по две точки в каждом.

Преобразование Фурье для этих двухточечных сегментов можно вычислить, не прибегая к операции умножения, однако операции умножения всё же потребуются при комбинировании двухточечных преобразований в единое целое. Сначала 8 двухточечных преобразований объединяются в 4 четырёхточечных, а затем — в 2 восьмиточечных, и наконец последние сливаются в одно искомое 16-точечное преобразование. На каждой из этих трёх стадий объединения сегментов требуется по 16 операций умножения, и таким образом, полное количество умножений будет равно 48, что составит лишь 3/16 от исходных 256. [Ричард Блейхут в своей книге «Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов» (М., Мир, 1989) называет «злополучным мифом» широко распространившееся мнение о том, что дискретное преобразование Фурье становится *быстрым* только тогда, когда длина блока равна степени двойки. На самом же деле хорошие БПФ-алгоритмы существуют практически для произвольной длины блока. — E.G.A.]

Поиски способов сокращения объема вычислительной работы начались ещё задолго до Кули и Тьюки и связаны с именем астронома Карла Фридриха Гаусса. [Забавно, иначе не скажешь... И всё-таки, несмотря на то, что Гаусс закончил свой жизненный путь [директором гёттингенской обсерватории](#), он, в первую очередь, был математиком. — E.G.A.] Гаусс хотел рассчитать орбиты комет и астероидов по данным всего лишь нескольких наблюдений. Найдя способ решения задачи, он нашёл также способ уменьшить сложность вычислений, воспользовавшись принципами, аналогичными тем, что лежат в основе быстрого преобразования Фурье. В 1805 году, излагая свою работу, Гаусс, в частности, писал: «Не трудно убедиться на собственном опыте, что этот метод значительно облегчит тяготы механической вычислительной работы». Таким образом, проблемы небесной механики не только привели к созданию аппарата высшей математики, но и стимулировали возникновение современных численных методов расчёта.

Физикам и инженерам, усвоившим алгебру комплексных чисел ещё в студенческие годы, представление функции в виде синусоид значительно облегчило решение многих задач. Пользуясь удобным представлением преобразования Фурье в виде комплексной функции, мы забываем иногда, что лежащие в основе этого подхода синусоидальные компоненты действительны, а не обязательно комплексны. Инерция привычки не позволила в своё время разглядеть важность и замедлила начало практического применения преобразования, сходного с преобразованием Фурье и предложенного Ральфом В. Л. Хартли в 1942 году.

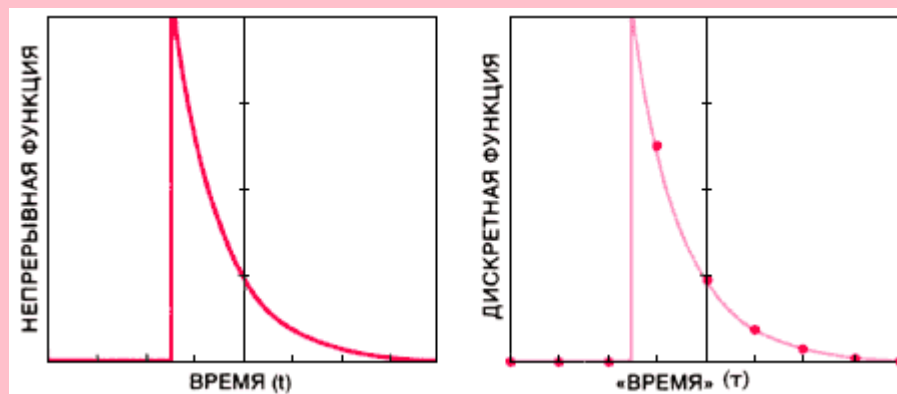
Работавший в научно-исследовательской лаборатории компании Western Electric Хартли руководил первыми разработками радиоприёмников для трансатлантической радиотелефонной связи и изобрёл колебательный контур, названный в его честь схемой Хартли. Во время первой мировой войны Хартли занимался изучением того, как человек определяет направление, откуда поступает слышимый им звук. Работая в послевоенный период в Bell Laboratories, Хартли первым сформулировал важный принцип теории передачи информации, утверждающий, что полное количество информации, которое способна передать система, пропорционально произведению ширины частотного диапазона передающей системы на время, в течение которого происходит передача. В 1929 году в связи с ухудшением здоровья Хартли отказался от дальнейшего руководства проектом. А когда он поправился, то решил посвятить себя теоретическим исследованиям, в результате которых им было разработано преобразование, названное его именем.

Преобразование Хартли — это ещё один способ анализа заданной функции посредством синусоид. Отличие между ним и преобразованием Фурье довольно простое. В то время как в преобразовании Фурье присутствуют действительные и мнимые числа, а

также комплексная сумма синусоидальных функций, в преобразовании Хартли используются только действительные числа и действительная сумма синусоидальных функций.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И ХАРТЛИ

Преобразования Фурье и Хартли трансформируют функции времени в функции частоты, содержащие информацию об амплитуде и фазе. Ниже приведены графики непрерывной функции $g(t)$ и дискретной $g(\tau)$, где t и τ — моменты времени.



Обе функции начинаются в нуле, скачком достигают положительного значения и экспоненциально затухают. По определению преобразование Фурье для непрерывной функции есть интеграл по всей вещественной оси, $F(f)$, а для дискретной функции — сумма по конечному набору отсчётов, $F(v)$:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) (\cos 2\pi ft - i \sin 2\pi ft) dt,$$

$$F(v) = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} g(\tau) (\cos 2\pi v\tau - i \sin 2\pi v\tau),$$

где f, v — значения частоты, n — число выборочных значений функции, а $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Интегральное представление больше подходит для теоретических исследований, а представление в виде конечной суммы — для расчётов на компьютере. Интегральное и дискретное преобразования Хартли определяются аналогичным образом:

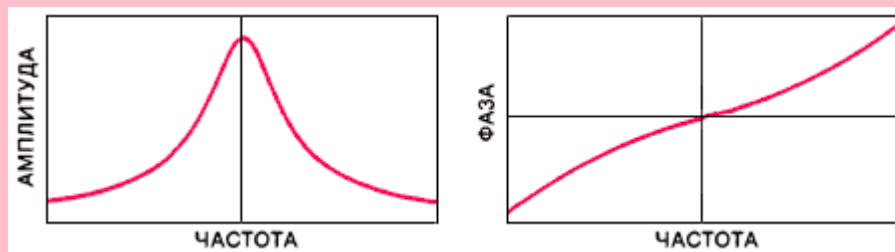
$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) (\cos 2\pi ft + \sin 2\pi ft) dt,$$

$$H(v) = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} g(\tau) (\cos 2\pi v\tau + \sin 2\pi v\tau).$$

Хотя единственная разница в обозначениях между определениями Фурье и Хартли заключается в присутствии множителя перед синусом, тот факт, что у преобразования Фурье есть и действительная, и мнимая часть, делает представления этих двух преобразований совершенно различными. Дискретные преобразования Фурье и Хартли имеют по существу ту же форму, что и их непрерывные аналоги.



Хотя графики выглядят по-разному, из преобразований Фурье и Хартли можно вывести, как показано ниже, ту же информацию об амплитуде и фазе.



Амплитуда Фурье определяется квадратным корнем из суммы квадратов действительной и мнимой частей. Амплитуда Хартли определяется квадратным корнем из суммы квадратов $H(-\nu)$ и $H(\nu)$. Фаза Фурье определяется арктангенсом мнимой части, делённой на действительную часть, а фаза Хартли определяется суммой 45° и арктангенса от $H(-\nu)$, делённого на $H(\nu)$.

В 1984 году мною был предложен алгоритм для быстрого преобразования Хартли. Разница во времени вычислений между быстрым преобразованием Хартли и быстрым преобразованием Фурье зависит от типа компьютера, а также языка и стиля программирования. Если эти факторы одинаковы и если при программировании не было сделано упущений, то программы для быстрого преобразования Хартли выполняются быстрее программ для быстрого преобразования Фурье. Хотя обе программы требуют одинакового времени для поиска данных, вычисления тригонометрических функций и выполнения других вспомогательных действий, время, непосредственно затрачиваемое на стадии преобразования Хартли, вдвое меньше того, которое требуется для преобразования Фурье.

Однако не сразу выяснилось, что преобразование Хартли даёт ту же информацию, что и преобразование Фурье. Поэтому в первых программах, написанных для вычисления преобразования Хартли, присутствовал ещё один лишний шаг, обеспечивавший его перевод к более знакомой форме Фурье. Однако вскоре исследователи поняли, что интенсивности и фазы можно вывести непосредственно из преобразования Хартли, не прибегая к дополнительному шагу по переводу одного преобразования в другое. Дальнейшие размышления показали, что каждое из этих преобразований даёт для каждой частоты пару чисел, представляющих колебательный процесс с определёнными амплитудой и фазой.

Ещё одним фактором, препятствовавшим распространению преобразования Хартли, было то, что описание физических явлений на основе преобразования Фурье было более естественным. Многие явления, в частности такие, как поведение простой системы под действием вибраций, как правило, описываются комплексной суммой синусоидальных

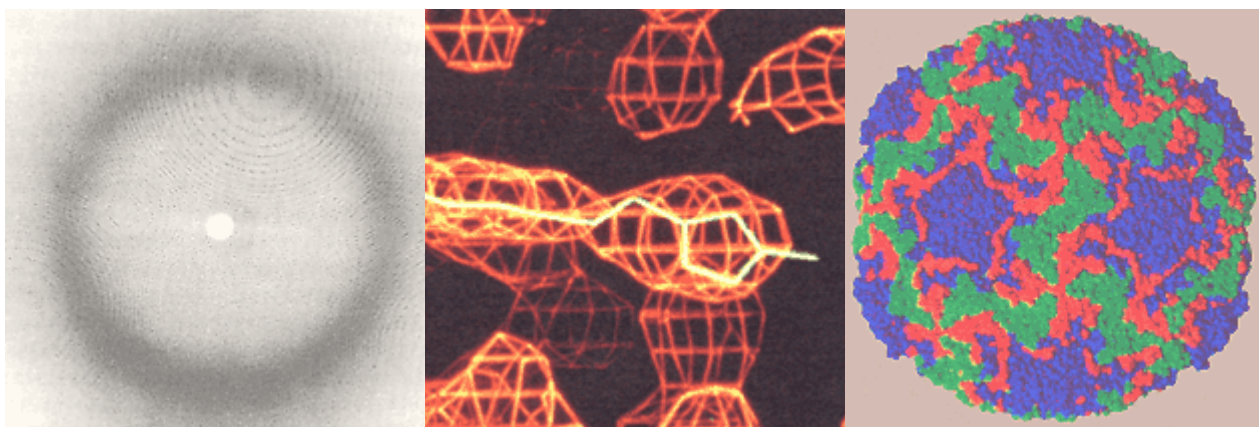
функций, что как раз характерно для преобразования Фурье. По этой причине может показаться, что преобразования Фурье больше подходят для описания природных явлений.

На самом деле такая точка зрения скорее отражает специфические особенности нашего образования, нежели законов природы. В конце концов, когда мы измеряем физические величины, то имеем дело с действительными числами, а не с комплексными.

С появлением быстрого преобразования Хартли некоторые приложения быстрого преобразования Фурье утратили своё значение. Примером таких приложений является процедура удаления шума при воспроизведении музыки, записанной цифровым способом. Эти приложения требуют двух программ: одна из них переводит действительные функции в комплексную область Фурье, в то время как другая выполняет обратный переход от комплексных функций к действительным. Высокочастотный шум в цифровой музыкальной записи может быть устранён путём отфильтровывания фрагментов преобразования, полученного при помощи первой программы. Затем вторая программа переводит измененное таким образом преобразование обратно в музыкальный сигнал улучшенного качества. Хотя обе эти программы выполняются каждая со скоростью, соперничающей с быстрым преобразованием Хартли, одной программы, построенной по принципу Хартли, оказывается достаточно и для того, чтобы перевести действительную функцию в преобразование Хартли и вернуть это преобразование, после соответствующей фильтрации, опять к действительной функции. Как следствие, высвобождается и лишняя память, требовавшаяся для хранения сразу двух программ.

В самой общей формулировке можно сказать, что преобразования Фурье и Хартли применяются в тех областях, где изучаются колебательные процессы. Поэтому ясно, что сфера их применения очень широка.

Часто эти преобразования применяются и в биологии. Так, например, форма двойной спирали ДНК была открыта в 1962 году с использованием дифракции рентгеновских лучей в сочетании с анализом Фурье. Рентгеновские лучи фокусировались на кристалле волокон ДНК, и изображение, получаемое при дифракции излучения на молекулах ДНК, фиксировалось на пленке. Эта дифракционная картина давала информацию об амплитуде при применении преобразования Фурье к кристаллической структуре. Информация о фазе, которую невозможно было извлечь из одних только фотографий, выводилась путём сопоставления дифракционной картины ДНК с картинками, полученными при анализе сходных химических структур. По интенсивности рентгеновских лучей и фазовой информации, полученной из преобразования Фурье, биологи смогли восстановить кристаллическую структуру, т.е. исходную функцию. В последние годы изучения дифракции рентгеновских лучей в сочетании с подобным «обратным» анализом Фурье позволили определить структуру и многих других органических молекул, а также более сложных образований, в частности вирусов.



Анализ Фурье позволяет трансформировать наблюдаемую картину дифракции рентгеновских лучей в молекулярные модели. Например, при взаимодействии рентгеновских лучей с электронами молекул вируса на фотоплёнке образуются своеобразные картинки (*слева*). Они представляют собой часть преобразования Фурье, применённого к молекулярной структуре вируса. Если обратить процесс преобразования, можно установить исходное распределение электронов, а стало быть, и атомов (*в центре*). По этим распределениям строится модель вируса (*справа*). Различными цветами здесь выделены различные белки.

С помощью анализа Фурье специалисты из Национального управления по авиации и исследованию космического пространства повышают чёткость изображений небесных тел, сфотографированных с космических аппаратов. Автоматические межпланетные станции и искусственные спутники Земли передают информацию на Землю в виде последовательностей радиоимпульсов. Компьютеры обрабатывают эти импульсы с помощью методов Фурье. При этом компьютер модулирует отдельные компоненты каждого преобразования, чтобы чётче выделить одни свойства и устранить другие, аналогично тому, как с помощью преобразования Фурье устраняется шум из сигнала музыкальной записи. В конечном итоге изменённые таким образом данные опять преобразуются к исходной форме, и тем самым восстанавливается изображение. При помощи описанного процесса можно резче сфокусировать изображение, отфильтровать туманный фон и отрегулировать контрастность.

Преобразование Фурье играет также очень важную роль в физике плазмы и полупроводниковых материалов, микроволновой акустике, сейсмологии, океанографии, радиолокации и медицинских обследованиях. Среди многочисленных приложений в химии можно назвать использование преобразования Фурье в спектрометрическом анализе.

Анализ Фурье очень помог мне, когда я работал над проблемой построения двумерных изображений. В 1956 году я наткнулся на теорему о «последовательных проекциях», которая открывала путь для восстановления изображений по интегралам, вычисляемым на полосках, теперь это хорошо известная проблема в томографии. Позже я придумал «модифицированный алгоритм обратной проекции», в настоящее время широко применяемый в компьютерной рентгеновской томографии.

Я также интересовался проблемой восстановления изображений, основанного на данных радиоастрономии. Желая локализовать источники радиоволн на солнечной поверхности, я применил методы, основанные на преобразовании Фурье, в конструкции сканирующего радиотелескопа, который ежедневно строил микроволновые температурные карты Солнца на протяжении 11 лет. Эти методы привели к созданию антенны, луч которой обладал лучшим разрешением, чем человеческий глаз. Впоследствии эта конструкция стала общепринятой в радиоантеннах. Карты солнечной

поверхности получили высокую оценку специалистов НАСА, так как способствовали безопасности космонавтов, участвовавших в лунных экспедициях.

В других своих работах я пользовался преобразованием Хартли. Недавно мой коллега Дж. Вилласенор и я описали оптический метод получения преобразования Хартли. Этот метод позволяет кодировать фазу и амплитуду Фурье в едином действительном изображении. Нами было разработано устройство, строящее преобразование Хартли с использованием микроволнового излучения. В настоящее время я готовлю к публикации несколько статей по физике Солнца, в которых на методах Фурье основаны новые способы анализа данных по количеству солнечных пятен и толщине земных отложений грунта.

Благодаря широкому применению метода Фурье и сходных с ним аналитических методов мы и сегодня можем повторить с полным основанием то, что лорд Кельвин сказал в 1867 году: «Теорема Фурье не только является одним из самых изящных результатов современного анализа, но и даёт нам незаменимый инструмент в исследовании самых трудных вопросов современной физики».

Литература

1. John Herviel. **Joseph Fourier: the Man and the Physicist**. Clarendon Press, 1975.
2. Ronald N. Bracewell. **The Fourier Transform and its Applications** (second edition, revised). McGraw-Hill Book Company, 1986.
3. Ronald N. Bracewell. **The Hartley Transform**. Oxford University Press, 1986. (Есть перевод: Р. Брейсуэлл. **Преобразование Хартли**. — М.: Мир, 1990.)
4. John Villasenor and R. N. Bracewell. **Optical Phase Obtained by Analogue Hartley Transformation**. In: *Nature*, 1987, v. 330, No. 6150, pp. 735–737.

Ronald N. Bracewell "The Fourier Transform"

Рональд Н. Брейсуэлл с 1955 года работает на электротехническом факультете Станфордского университета. Образование получил в Сиднейском университете, а докторскую диссертацию защитил в Кавендишской лаборатории Кембриджского университета в Англии. В своих исследованиях он занимался микроволновой радиолокацией, физикой ионосферы и радиоастрономией. В Станфордском университете Брейсуэлл является научным сотрудником лаборатории космических исследований, телекоммуникаций и радиофизики, а также почётным профессором по информатике и вычислительной технике.